Frage aus dem Tut: Wurzel aus negativen Zahlen in DGLs

Fragestellung

Wir haben im letzten Tut die gängige Regel $\sqrt{-1} = i$ benutzt, um für $E < V_0$ den Radikanden positiv zu machen. Konkret haben wir

$$i\sqrt{\gamma(E - V_0)} = i\sqrt{-\gamma(V_0 - E)} = i\sqrt{(-1)\cdot\gamma(V_0 - E)} = i\sqrt{(-1)}\sqrt{\gamma(V_0 - E)} = ii\sqrt{\gamma(V_0 - E)} = -\sqrt{\gamma(V_0 - E)}$$

geschrieben. Nach dem Tutorium kam der Einwand, dass sich ein Widerspruch ergibt, wenn man folgendermaßen rechnet:

$$i\sqrt{\gamma(E - V_0)} = \sqrt{-1}\sqrt{\gamma(E - V_0)} = \sqrt{(-1)\cdot\gamma(E - V_0)} = \sqrt{\gamma(E - V_0)} \neq -\sqrt{\gamma(V_0 - E)}.$$

Wir haben praktisch oben $\sqrt{-1} = i$ benutzt und unten $i = \sqrt{-1}$. Was ist nun richtig, was falsch?

Antwort: Gründe für den Widerspruch

Es gibt für mich zwei mögliche Gründe, warum es zu obigem Widerspruch kommt: Beide hängen damit zusammen, dass man mit Wurzeln negativer Zahlen vorsichtig sein muss:

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Oft liest man, dass die imaginäre Einheit als $i^2 = -1$ definiert ist, aber dass das noch lange nicht bedeutet, dass $i = \sqrt{-1}$ ist. Immerhin findet man mit folgender Rechnung auch kein eindeutiges Ergebnis:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{e^{\pm i\pi}} = e^{\pm i\pi/2} = \cos\pi/2 \pm i\sin\pi/2 = \pm i.$$

Dieses Problem könnte man ggf. mit einer Einschränkung des Definitionsbereichs für das Argument komplexer Zahlen beheben.

Auf Wikipedia habe ich außerdem gefunden, dass man nicht $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)}$ schreiben darf.

Antwort: Lösung des Problems

Wo genau das Problem liegt, das auf obigen Widerspruch führt, würde ich an dieser Stelle gerne den Mathematikern überlassen. Fakt ist: Beide der obigen Rechenwege sind falsch. Wie so oft machen Physiker das aber trotzdem, weil es in der physikalischen Praxis keine Probleme macht. Warum das keine Probleme macht, möchte ich im Folgenden zeigen.

Für $a > 0$ sind wir uns vermutlich einig, dass folgende DGLs folgende Lösungen haben:

$$f_1''(x) = af_1(x) \qquad \Rightarrow \qquad f_1(x) \sim e^{\pm\sqrt{a}x} \;\widehat{=}\; Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x},$$

$$f_2''(x) = -af_2(x) \qquad \Rightarrow \qquad f_2(x) \sim e^{\pm i\sqrt{a}x} \;\widehat{=}\; Ae^{i\sqrt{a}x} + Be^{-i\sqrt{a}x}.$$

Oder, für allgemeine $a \in \mathbb{R}$,

$$f_1''(x) = af_1(x) \qquad \Rightarrow \qquad f_1(x) \sim \begin{cases} e^{\pm\sqrt{a}x} \;\widehat{=}\; Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}, & \text{für } a > 0, \\ e^{\pm i\sqrt{|a|}x} \;\widehat{=}\; Ae^{i\sqrt{|a|}x} + Be^{-i\sqrt{|a|}x}, & \text{für } a < 0, \end{cases}$$

$$f_2''(x) = -af_2(x) \qquad \Rightarrow \qquad f_2(x) \sim \begin{cases} e^{\pm i\sqrt{a}x} \;\widehat{=}\; Ae^{i\sqrt{a}x} + Be^{-i\sqrt{a}x}, & \text{für } a > 0, \\ e^{\pm\sqrt{|a|}x} \;\widehat{=}\; Ae^{\sqrt{|a|}x} + Be^{-\sqrt{|a|}x}, & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

So ist es richtig und Widerspruchsfrei. Das bedeutet: Streng genommen muss man immer eine Fallunterscheidung bzgl. des Vorzeichens von a machen, *sobald man die Lösung der DGL aufschreibt*. Streng genommen ist es also falsch für $a \in \mathbb{R}$ zu sagen, die Lösung von $f''(x) = af(x)$ sei $f(x) \sim e^{\pm\sqrt{a}x}$, da $\sqrt{a}$ nicht für negative a definiert ist.

Als Physiker nimmt man's in der Praxis nicht so genau und schreibt dennoch für beliebige $a \in \mathbb{R}$ einfach

$$f_1''(x) = af_1(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f_1(x) \sim e^{\pm\sqrt{a}x} \;\widehat{=}\; Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x},$$

$$f_2''(x) = -af_2(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f_2(x) \sim e^{\pm i\sqrt{a}x} \;\widehat{=}\; Ae^{i\sqrt{a}x} + Be^{-i\sqrt{a}x}.$$

Zwar stößt man nun für $a < 0$ auf den Widerspruch, dass

$$f_1(x) = Ae^{\sqrt{-|a|}x} + Be^{-\sqrt{-|a|}x} = \begin{cases} Ae^{i\sqrt{|a|}x} + Be^{-i\sqrt{|a|}x} & \text{mit I} \\ Ae^{-i\sqrt{|a|}x} + Be^{i\sqrt{|a|}x} & \text{mit II} \end{cases},$$

$$f_2(x) = Ae^{i\sqrt{-|a|}x} + Be^{-i\sqrt{-|a|}x} = \begin{cases} Ae^{-\sqrt{|a|}x} + Be^{\sqrt{|a|}x} & \text{mit I} \\ Ae^{\sqrt{|a|}x} + Be^{-\sqrt{|a|}x} & \text{mit II} \end{cases},$$

je nachdem, ob man

I: $\sqrt{-|a|} = \sqrt{-1}\sqrt{|a|} = i\sqrt{|a|}$ oder

II: $\sqrt{-|a|} = -ii\sqrt{-|a|} = -i\sqrt{-1}\sqrt{-|a|} = -i\sqrt{(-1)(-|a|)} = -i\sqrt{|a|}$

benutzt. Aber da A, B ja an diesem Punkt eh erstmal beliebig sind, spielt diese Diskrepanz keine Rolle.